Instituto Técnico "Jesús Obrero".
Matemática – 4to. Año. Electrónica e Informática
Tema 7 (Continuación)

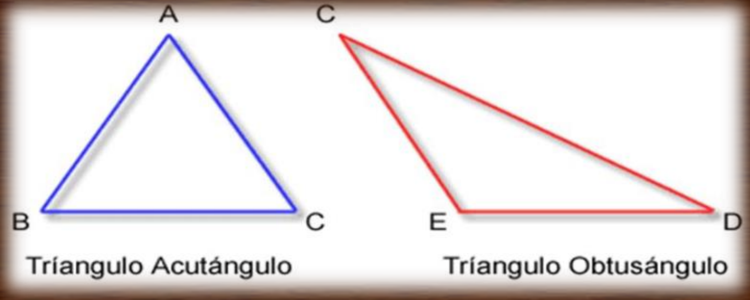
Triángulos Oblicuángulos

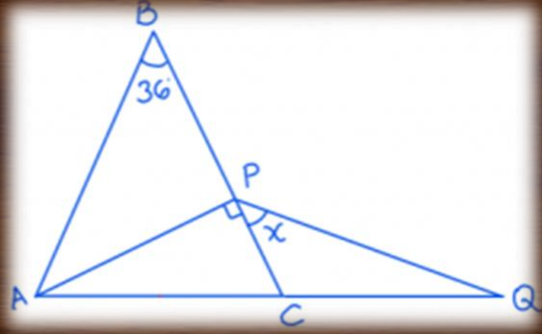
Material Elaborado con fines pedagógicos por:
Prof. Edgar J. Rodríguez
Abril - 2020

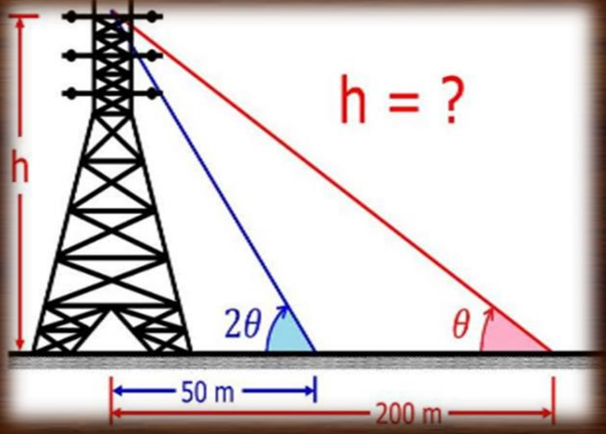
DEFINICIÓN

Llamaremos **triángulo oblicuángulo** a aquel en el que uno de sus ángulos internos es obtuso (Obtusángulo) o todos sus ángulos internos son agudos (Acutángulo). Es decir, ninguno de sus ángulos internos es de 90° y que, dadas estas condiciones particulares, no pueden resolverse por trigonometría básica.

Veamos en las figuras, algunos ejemplos de triángulos oblicuángulos:







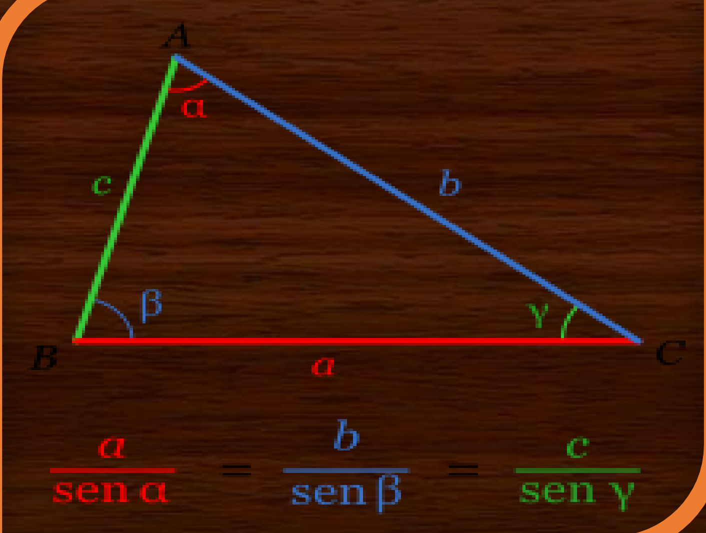
FORMAS DE RESOLUCIÓN

Triángulos Oblicuángulos

Según sea el tipo de triángulo y los datos que se tengan, se pueden aplicar uno o los dos teoremas siguientes:

Teorema del Seno (Llamado también Ley del Seno)

Enunciado: En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos



<u>De la figura podemos destacar algunas cosas importantes:</u>

.- La fórmula: $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$

.- Las letras minúsculas representan los lados, las mayúsculas los vértices y/o los ángulos y las letras griegas los ángulos opuestos a los lados.

.- Por lo tanto: a, b y c son los lados; A (α), B (β) y C (γ), son los ángulos.

.- Al sustituir todos los valores en la fórmula y dividir los elementos (numerador entre denominador) se verifica la relación proporcional. Es decir: a ÷ seno α = b ÷ seno β = c ÷ seno γ

Triángulos Oblicuángulos

EJEMPLOS

(Ejercicios Resueltos)

1.- Sin dibujar el triángulo y dados los datos siguientes, determina los lados faltantes aplicando el Teorema del Seno y demuestra que se cumple la relación proporcional. (Utiliza tu calculadora ya que en muchos casos los ángulos no son notables).

$$\alpha = 37º;\ \beta = 67º\ y\ c = 53\ cm$$

Paso 1. Sustituimos los datos del triángulo en la fórmula:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen }\beta} = \frac{c}{\text{sen }\gamma}$$

$$\frac{a}{\text{sen}37º} = \frac{b}{\text{sen }67º} = \frac{53\text{ cm}}{\text{sen }\gamma}$$

Paso 2. Si falta el valor de un ángulo lo podemos determinar por la propiedad que dice que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Por lo tanto: 37° + 77° = 104°; entonces: (180° - 104° = 76°). Por lo tanto: γ = 76°. Así: $\frac{a}{\text{sen}37º} = \frac{b}{\text{sen }67º} = \frac{53\text{ cm}}{\text{sen }76º}$

Paso 3. Debemos calcular ahora los lados a y b. Para ello escogemos la fracción que esté completa y la relacionamos con una de las que tienen un dato parcial. Así: $\frac{a}{\text{sen}37º} = \frac{53\text{ cm}}{\text{sen }76º}$. (Fíjate que hay una sola incógnita).

Paso 4. Despejamos (a) que es nuestra incógnita. Así: $a = \frac{53\text{ cm}}{\text{sen }76º}.\text{sen }37º$

Paso 5. Calculamos el seno de 76° y el seno de 37° hasta con 4 cifras significativas y se sustituye en la fórmula. Así: $a = \frac{53\text{ cm}}{0{,}9702}.\,0{,}6018$. Por lo tanto <u>**a = 32,87 cm**</u> (Es importante considerar que tú calculadora debe mostrar en su pantalla la letra (D). Para que sean correctos los valores del seno.

Paso 6. Determinamos (b), despejando de la relación con una de las dos fracciones que ahora están completas (la de (c) o la de (a)). Así:

Continúa en la lámina siguiente…

EJEMPLOS
(Ejercicios Resueltos)

$$\frac{b}{\text{sen } 67^{\circ}} = \frac{53\text{ cm}}{\text{sen } 76^{\circ}} \rightarrow b = \frac{53\text{ cm}}{\text{sen } 76^{\circ}}.\text{sen } 67^{\circ} \rightarrow b = \frac{53\text{ cm}}{\text{sen } 76^{\circ}}.\text{sen } 67^{\circ}$$ Luego… $$b = \frac{53\text{ cm}}{0{,}9702}.0{,}9205\ ,$$

es decir: **b = 50,28 cm**

Ahora, con todos los datos de la fórmula completos, demostraremos la relación proporcional. Así:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen}\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\beta}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\gamma}} \rightarrow \frac{32{,}87}{\text{sen } 37^{\circ}} = \frac{50{,}28}{\text{sen } 67^{\circ}} = \frac{53}{\text{sen } 76^{\circ}} \rightarrow \frac{32{,}87}{0{,}6018} = \frac{50{,}28}{0{,}9205} = \frac{53}{0{,}9702} \rightarrow 54{,}61 = 54{,}31 = 54{,}62$$

Fíjate que se cumple la relación proporcional ya que las divisiones dan valores aproximados.

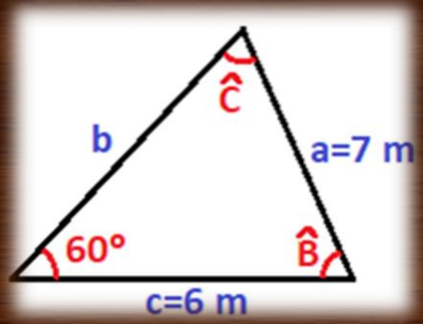
Conclusión: el ejercicio está es correcto

EJEMPLOS

(Ejercicios Resueltos)

Triángulos Oblicuángulos

2.- Observa el triángulo de la figura:



Datos:

a = 7 m

b = ?

c = 6 m

A o α = 60°

(A, es el ángulo opuesto al lado (a)).

.- Vamos sustituir los datos en la fórmula:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

$$\frac{7\text{ m}}{\operatorname{sen} 60º} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{6\text{ m}}{\operatorname{sen}\gamma}$$

.- Tomamos la fracción que esté completa y la fracción parcial:

$$\frac{7\text{ m}}{\operatorname{sen}60º} = \frac{6\text{ m}}{\operatorname{sen}\gamma}$$

.- Despejamos considerando que la incógnita está en el denominador

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{6\text{ m}}{\frac{7\text{ m}}{\operatorname{sen}60º}} \rightarrow \operatorname{sen}\gamma \frac{\frac{6\,m}{1}}{\frac{7\,m}{sen\ 60º}} \rightarrow \operatorname{sen}\gamma = \frac{6\,m\ x\ sen\ 60º}{1\ x\ 7m}$$

$\operatorname{sen}\gamma = \frac{5{,}1961\,\cancel{m}}{7\,\cancel{m}}$ $\rightarrow$ sen γ = **0,7423 ...pero necesitamos es el valor del ángulo (γ), por lo tanto luego de obtener el valor anterior, pulsamos shift + sin y nos dará el valor del ángulo, es decir: γ = 47,92º.**

Ahora la fórmula nos queda: $\frac{7\text{ m}}{\operatorname{sen} 60º} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{6\text{ m}}{\operatorname{sen} 47{,}92º}$

Y podemos calcular a β, por simple inspección: 60º + 47,92º = 107,92º, así entonces 180º - 107,97º = 72,08º, por lo que β = 72,08º. Luego:

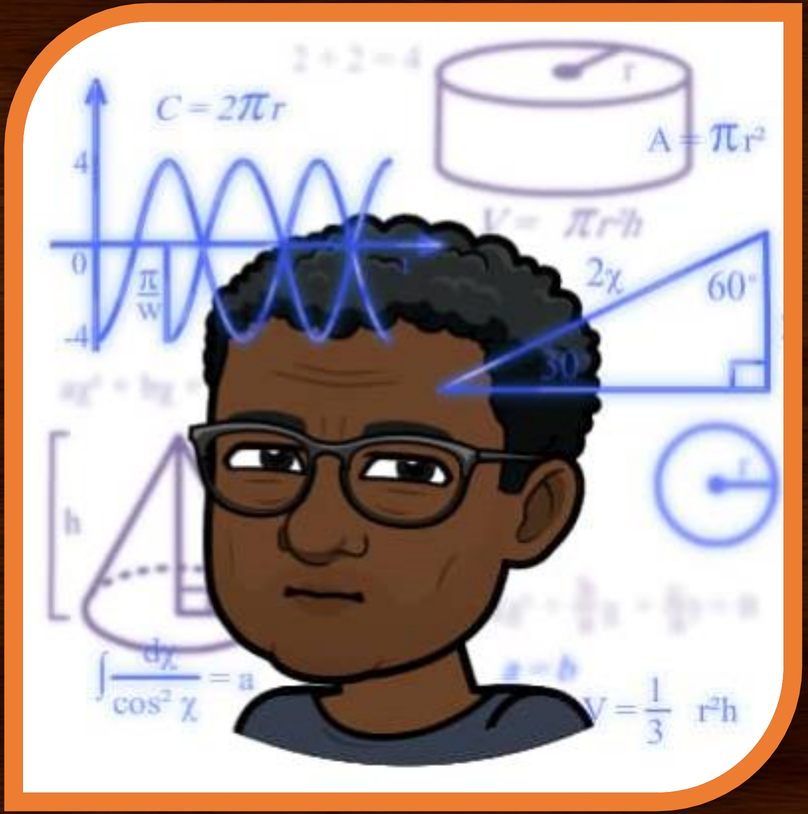
$$\frac{7\text{ m}}{\operatorname{sen} 60º} = \frac{b}{\operatorname{sen} 72{,}08º} = \frac{6\text{ m}}{\operatorname{sen} 47{,}92º}$$

Reto: Calcula (b) con cualquiera de las fracciones completas y demuestra que se cumple la relación proporcional.

(Utiliza tu cuaderno)

Triángulos Oblicuángulos

MI CEREBRO AL MOMENTO DE TERMINAR ESTA PARTE DE LA PRESENTACIÓN



SIGAMOS ADELANTE …

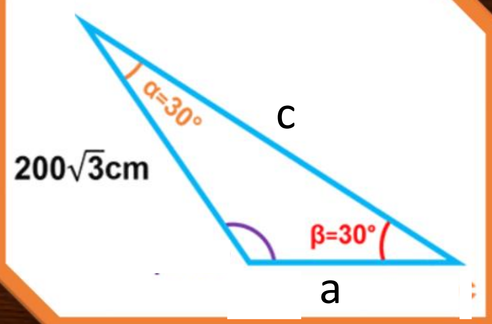
Triángulos Oblicuángulos

Utiliza tu cuaderno y realiza los siguientes ejercicios

1.- Sin dibujar el triángulo, determina los datos faltantes, aplicando el Teorema del Seno y demuestra la relación proporcional:

$\alpha = 42º;\ \beta = 56º\ y\ c\ 33{,}2\ m$

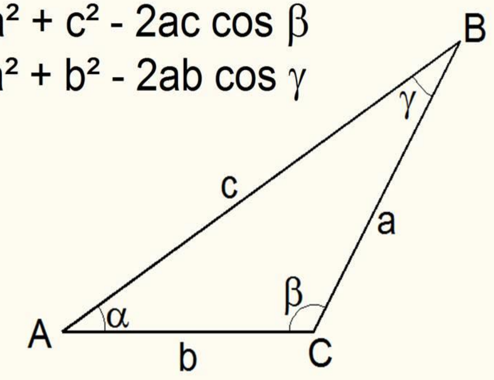
2.- Resuelve el triángulo de la figura:



TEOREMA DEL COSENO (Llamado también Ley del Coseno)

Enunciado: En un triángulo, El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de esos lados por el coseno del ángulo que ellos forman (ÁNGULO OPUESTO)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Ejemplos. (Ejercicios Resueltos)

1.- En un triángulo obtusángulo se sabe que: a = 24 cm; c = 32 cm y β = 115°. Determina el lado faltante.

- Según los datos del problema, el lado faltante es (b), es por ello que el ángulo dado es β, pues siempre debemos conocer el valor de los otros 2 lados y del ángulo opuesto.
- Escogemos entre las fórmulas que están en la figura la correspondiente a (b), sustituimos y hacemos el cálculo.

Continúa en la lámina siguiente…

SIGAMOS ADELANTE …

$b^2 = (24\ cm)^2 + (32\ cm)^2$ - 2 (25 cm x 32 cm) . Cos 115º

$b^2 = 576\ cm^2 + 1024\ cm^2$ - 1600 cm^2. (-0,4226)

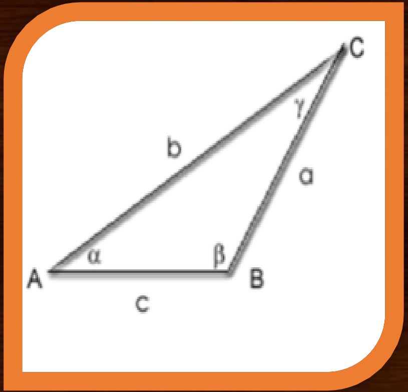
$b^2 = 1600\ cm^2$ - [1600 cm^2. (-0,4226)] (Este producto se hace primero)

$b^2 = 1600\ cm^2$ - [-676,16 cm^2] → $b^2 = 1600\ cm^2$ + 676,16 cm^2

$b^2 = 1600\ cm^2$ + 676,16 cm^2 → $b^2 = 2276,16\ cm^2$

$b = \sqrt{2276,16\ cm^2}$ → **b = 47,70 cm**

2.- Observa la figura adjunta:



En ella: a = 18 m; b = 25 m; c = 12 m. Determina el valor de los ángulos.

SOLUCIÓN

.- Debemos aplicar las fórmulas para determinar los ángulos. Estas provienen del despeje que se hace de sus respectivas fórmulas del Teorema del Coseno. Así:

- $\text{Cos}\ \alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- $\text{Cos}\ \beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
- $\text{Cos}\ \gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Continúa en la lámina siguiente

SIGAMOS ADELANTE …

Triángulos Oblicuángulos

.- Sustituimos ahora fórmula por fórmula. Así:

$$\text{Cos}\ \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(25\ m)^2 + (12\ m)^2 - (18\ m)^2}{2.(25\ m \times 12\ m)}$$

$$\text{Cos}\ \alpha = \frac{625\ m^2 + 144\ m^2 - 324\ m^2}{600\ m^2} = \frac{445\ \cancel{m^2}}{600\ \cancel{m^2}} \rightarrow \text{Cos}\ \alpha = 0{,}7416666\ \ldots$$

Pero recuerda que estamos hallando el valor del ángulo, es decir el valor de α, para ello cuando hagamos la división que nos da el último valor, le damos shift + coseno y entonces: α = **42,12°**

.- Calcula ahora por tu cuenta los valores de β y γ, aplicando la fórmula respectiva y recordando la propiedad fundamental de todo triángulo:

La suma de sus ángulos internos debe dar 180°

Respuestas: β = 110,18° (aprox) y
γ = 27,33° (aprox)

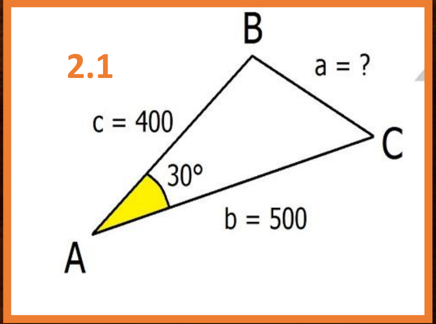
EJERCICIOS

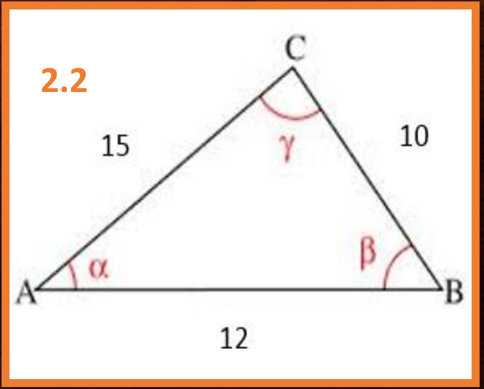
(Para resolver en el cuaderno)

1.- Dados los datos siguientes, correspondientes a triángulos distintos, determina lo que se pide:

1.1) α = 133°; b = 12 m y c = 15 m. Hallar (a).
1.2) a = 28,4 cm; b = 40,3 cm y 25,7 cm Hallar el valor de los ángulos.

2.- Determina lo que se pide en cada uno de los triángulos:





Triángulos Oblicuángulos

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

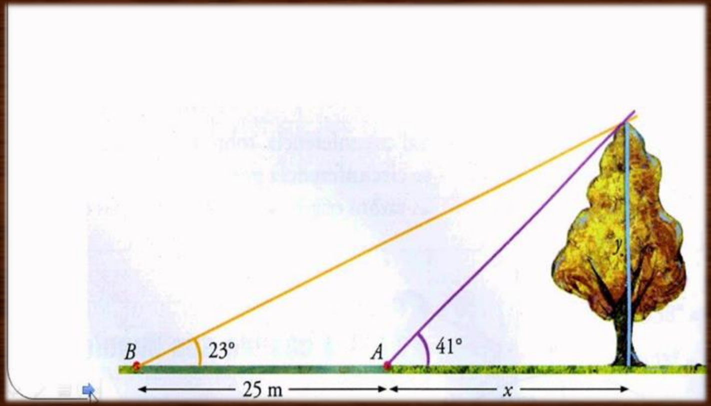
De la misma forma que en trigonometría básica, es pertinente comprender y aprender la aplicabilidad que tienen estos teoremas (seno y coseno) en la vida diaria. Para ello te dejo los siguientes links que te permitirán visualizar de una manera pedagógica lo relacionado con problemas de aplicación.

- https://www.youtube.com/watch?v=LUVwohwQnNU&feature=youtu.be
  (Problema sencillo de Aplicación. Ley del Seno)
- https://www.youtube.com/watch?v=5tXa1tiA4qA
  (Problema sencillo de Aplicación. Ley del Seno)
- https://www.youtube.com/watch?v=BwhpIsVXEuE&feature=youtu.be
  (Problema de Aplicación Ley del Seno que incluye trigonometría básica)
- https://www.youtube.com/watch?v=84FDKiXpUIU
  (Problema sencillo de Aplicación. Ley del Coseno)
- https://www.youtube.com/watch?v=d1qohmjQHS4 (Aplicación de Ley del Coseno)

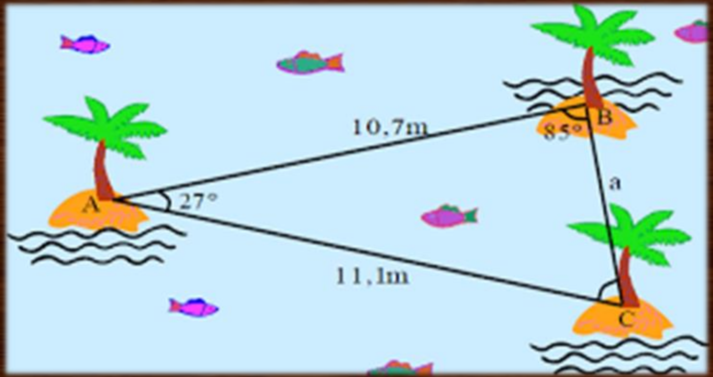
EJERCICIOS

Triángulos Oblicuángulos

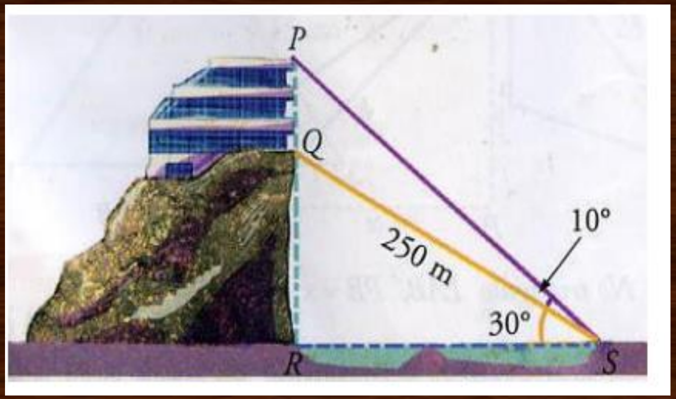
1.- Calcula la altura del árbol, según los datos de la figura. (Usa ley del Seno y Trigonometría básica. Ojo con la propiedad de la suma de los ángulos internos)



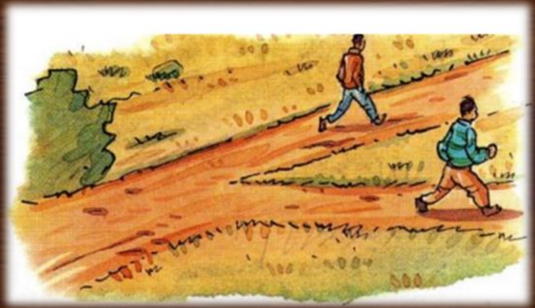
2.- Determina la distancia que separa a las palmeras ubicadas en los puntos B yC. (Utiliza el teorema que consideres pertinente)



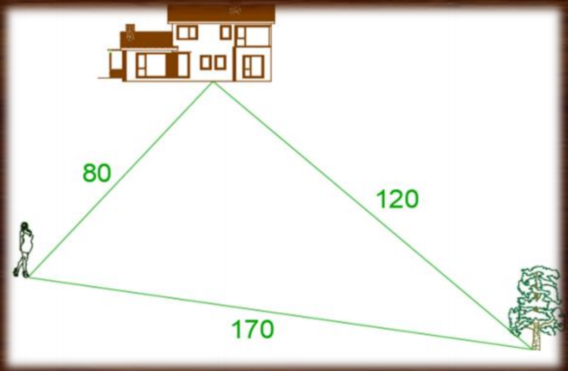
3.- Determina la altura del edificio que se encuentra sobre la roca. (Utiliza el teorema que consideres pertinente)



4.- Dos hombres parten al mismo tiempo de un cruce de caminos rectos que forman entre sí un ángulo de 15°. ¿a qué distancia se encontrará uno del otro, tiempo después? (Utiliza el teorema del coseno)



5.- Determina el valor de los ángulos dada la figura (Utiliza el teorema del coseno)



Triángulos Oblicuángulos

FUENTES BIBLIOGRÁFICAS

Parte de la información, imágenes y ejercicios de esta presentación se tomó con fines pedagógicos de:

- https://www.youtube.com/watch?v=LUVwohwQnNU&feature=youtu.be
- https://www.youtube.com/watch?v=BwhpIsVXEuE&feature=youtu.be
- http://www.juansanmartin.net/documentacionclase2018_2019/boletines_2018_2019/matematicas04/Tema_IX/Boletin_Problemas_Trigonometria_V.pdf
- http://www.juansanmartin.net/documentacionclase2018_2019/boletines_2018_2019/matematicas04/Tema_IX/Boletin_Problemas_Trigonometria_IV.pdf
- www.juansanmartin.net
- www.Pinterest.com
- SUÁREZ Y BRET. Matemática I Cs. C.D. Distribuidora Escolar. (2002)
- GID, Jorge. Selección de Temas de Matemática 4. SPHINX. (2009)

A descansar un rato……nos queda full trabajo por delante….